Devoir maison n$^{\text{o}}$ 3 - Correction

Exercice 1.
À l'aide des formules d'Euler, linéariser l'expression $\cos(x)\sin^2(x)$.

D'après les formules d'Euler,

$$
\begin{aligned}
\cos(x)\sin^2(x) &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\times\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 && \\
& && \textit{développement du carré} \\
&= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\times\frac{e^{2ix}-2+e^{-2ix}}{-4} && \\
& && \textit{distributivité} \\
&= \frac{e^{3ix}-2e^{ix}+e^{-ix}+e^{ix}-2e^{-ix}+e^{-3ix}}{-8} && \\
& && \textit{simplifications} \\
&= \frac{e^{3ix}-e^{ix}-e^{-ix}+e^{-3ix}}{-8} && \\
& && \textit{regroupements des conjugués} \\
&= \frac{\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)-\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)}{-8} && \\
& && \textit{formule d'Euler} \\
&= \frac{2\cos(3x)-2\cos(x)}{-8} && \\
& && \textit{simplification} \\
&= \boxed{\frac{\cos(x)-\cos(3x)}{4}} &&
\end{aligned}
$$

où à l'avant dernière égalité, on a utilisé la formule d'Euler sous la forme $e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$.

Exercice 2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad w_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} \leqslant w_n$.

Méthode usuelle : pour des inégalités concernant des intégrales, on cherche des inégalités sur les fonctions à intégrer.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0\,;\pi]$. On a

$$\begin{aligned}
n\pi &\leqslant (n+1)\pi \\
&\Big\downarrow {+t} \\
n\pi + t &\leqslant (n+1)\pi + t \\
&\Big\downarrow \textit{inverse} \\
\frac{1}{n\pi + t} &\geqslant \frac{1}{(n+1)\pi + t} \\
&\Big\downarrow \times \sin(t) \ \textit{qui est positif sur } [0\,;\pi] \\
\frac{\sin t}{n\pi + t} &\geqslant \frac{\sin t}{(n+1)\pi + t} \\
&\Big\downarrow \textit{on intègre sur } [0\,;\pi] \\
w_n &\geqslant w_{n+1}.
\end{aligned}$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{2}{(n+1)\pi} \leqslant w_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Méthode : l'idée est la même qu'à la question précédente.

• Commençons par la majoration.

Pour majorer une fraction, on peut majorer son numérateur et/ou minorer son dénominateur. Comme, pour tout $t \in [0\,;\pi]$, on a $\sin t \leqslant 1$ et $n\pi + t \geqslant n\pi$, on obtient $\dfrac{\sin t}{n\pi + t} \leqslant \dfrac{1}{n\pi}$. En passant à l'intégrale, il vient

$$w_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi} \frac{1}{n\pi}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{d}t = \frac{1}{n\pi} \times \pi = \boxed{\frac{1}{n}}.$$

• Montrons maintenant la minoration.

Pour tout $t \in [0\,;\pi]$, on a $n\pi + t \leqslant n\pi + \pi$, d'où en passant à l'inverse $1/(n\pi + t) \geqslant 1/(n\pi + \pi)$ puis $\dfrac{\sin t}{n\pi + t} \geqslant \dfrac{\sin t}{n\pi + \pi}$. En passant à l'intégrale, on obtient

$$w_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + \pi}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)\pi}\Big[-\cos t\Big]_0^{\pi} = \boxed{\frac{2}{(n+1)\pi}}.$$

3. En déduire la convergence de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite.

On utilise l'encadrement précédent. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{(n+1)\pi} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = 0}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide du changement de variable $x = t + n\pi$, montrer que $u_n = (-1)^n w_n$.

On pose $x = t + n\pi$ donc $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. On a aussi $t = x - n\pi$ (utile pour les bornes). Ainsi par changement de variable

$$\begin{aligned} u_n &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin(t+n\pi)}{t+n\pi}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)\cos(n\pi)+\cos(t)\sin(n\pi)}{n\pi+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)(-1)^n+0}{n\pi+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \boxed{(-1)^n w_n}. \end{aligned}$$

5. À l'aide du critère spécial des séries alternées, démontrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

D'après la question précédente, on étudie la série de terme général $(-1)^n w_n$.
Cours : pour appliquer le CSSA, on doit montrer que la suite (w_n) est positive, décroissante et de limite nulle.
D'après la question 1, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et d'après la question 3 sa limite vaut 0. Enfin, d'après la question 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \geqslant \dfrac{2}{(n+1)\pi} \geqslant 0$, *i.e.* cette suite est positive.
Ainsi, d'après le critère spécial des séries alternées, $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ est convergente}}$.

6. Montrer que la série $\sum |u_n|$ est divergente.

Pour $n \in \mathbb{N}$, d'après la question 4, on a $|u_n| = |w_n| = w_n$ (cf question précédente). Et d'après la question 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_n \geqslant \dfrac{2}{(n+1)\pi}$.
Or $\dfrac{2}{(n+1)\pi} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n\pi}$ et la série $\sum \dfrac{2}{n\pi}$ est divergente (série harmonique). Donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum w_n$ est divergente, *i.e.* $\boxed{\sum |u_n| \text{ est divergente}}$.

7. Qu'a-t-on mis en évidence ?

D'après le cours, on sait que si une série est absolument convergente alors elle est convergente.
L'exemple de la série $\sum u_n$ montre *a contrario* qu'une série peut être convergente (question 5) sans être absolument convergente (question 6), *i.e.* la réciproque du résultat du cours est fausse.

Exercice 3. [Facultatif]
Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

• Supposons que $\sum u_n$ est convergente.
En particulier $u_n \to 0$ et donc $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{u_n}{1+0} = u_n$. Comme la série $\sum u_n$ est convergente, par équivalence de séries à termes positifs, $\sum v_n$ est également convergente.

• Supposons que $\sum v_n$ est convergente.
En particulier $v_n \to 0$. Or

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n} \iff u_n = v_n(1+u_n) \overset{v_n \neq 1}{\iff} u_n = \frac{v_n}{1-v_n},$$

donc on a aussi $u_n \to 0$. Comme précédemment, on obtient $v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$ et on conclut comme ci-dessus.

• On a donc montré que $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\sum v_n$ est convergente, *i.e.* ces deux séries sont de même nature.